17.3.25

Monotone Konvergenz

Satz

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monotone wachsend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$.

(a_n) mon $\nearrow$ + beschränkt $\Rightarrow \lim a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(a_n) mon $\searrow$ + beschränkt $\Rightarrow \lim a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. $A_n := \{a_k \mid k \geq n\}$

Sei $b_n := \inf A_n$, $c_n := \sup A_n$.

$(b_n)_{n\geq 1}$ mon. $\nearrow$ + beschränkt, $(c_n)_{n\geq 1}$ mon $\searrow$ + beschränkt

$\liminf a_n := \lim b_n$

$\limsup a_n := \lim c_n$

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bmk. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge. Dann gilt für jede konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$

$\liminf a_n \leq \lim b_n \leq \limsup a_n$

Bmk. Jede Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$ einer konvergenter Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist auch konvergent und $\lim b_n = \lim a_n$.

Bsp ① $\lim n^b q^n = 0$

Für $0 \leq q < 1$, $b \in \mathbb{Z}$

Insbesondere $\lim q^n = 0$

falls $0 \leq q < 1$

Falls $q > 1$, dann

$$\lim q^n = \infty$$

② $\lim n^{1/n} = 1$

③ $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert

Wir nennen den Grenzwert

$e \cong 2.718 \ldots$

④ $\left((-1)^n\right)_{n \geq 1}$ divergiert

⑤ $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergiert

Cauchy Kriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von reelle Zahlen.

$(a_n)_{n \geq 1}$ ist Cauchy $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent

Insbesondere: $(a_n)_{n \geq 1}$ ist Cauchy $\Longrightarrow$ $(a_n)_{n \geq 1}$ ist beschränkt

Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heisst **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$, ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so dass für alle $m, n > n_0$ gilt

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

§ 2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$

Defn Eine Folge in $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\dots\times\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$$

Wir schreiben a_n statt $a(n)$.

$$a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,d}) \in \mathbb{R}^d.$$

Sei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$

$$\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$$

$$\|z = x + iy\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$$

$$z = x+iy \rightsquigarrow (x, y)$$

Defn ① Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^d$ heisst beschränkt, falls es $M > 0$ gibt so dass

$$\|a_n\| \leq M \quad \forall n.$$

② Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert gegen a, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$

c-d $\forall n \geq n_0$, $\|a_n - a\| < \varepsilon$.

Falls a existiert, ~~ist~~ heisst a der Grenzwert der Folge und ist eindeutig bestimmt.

Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ nicht konvergent ist, ist sie divergent

Schreiben wir

$$\lim a_n = a$$

Falls der Grenzwert existiert.

Bmk $\lim a_n = a$

$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$

Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$

$a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots a_{n,d})$.

Dann gilt

Satz: Sei $b = (b_1, b_2 \dots b_d) \subset \mathbb{R}^d$

Folgende Aussagen sind äquivalent

① $\lim a_n = b$ ② $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall\, 1 \leq j \leq n$.

Bsp. ① $(a_n) \subset \mathbb{R}^3$

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$(a_{n,1})_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$

$(a_{n,2})_{n\geq 1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$

$(a_{n,3})_{n\geq 1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \subset \mathbb{R}$.

$a_n \to (0, 1, e)$.

② $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$

$$z_n = \underbrace{\left(\frac{n^2+2}{n^3+1}\right)}_{\downarrow \atop 0} + i \underbrace{\left(\frac{n^3+2n+1}{n^3+n+1}\right)}_{\downarrow \atop 1}$$

$z_n \to i$

Beweis

Hint: $x = (x_1, x_2, \dots x_d) \in \mathbb{R}^d$

Dann gilt für alle j, $1 \le j \le d$

(*) $x_j^2 \le \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \le d \max_{1 \le j \le d} (x_j)^2$

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_j^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_d^2$

① ⇒ ② Man kann $x_j^2 \le \sum_{i=1}^{d} x_i^2$ benutzen

② ⇒ ① Man kann $\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \le d \max_{1 \le i \le d} (x_i^2)$

$\| x \| \le \sqrt{d} \max |x_i|$ - benutzen.

Satz

① Eine Folge $(a_n)_{n \ge 1} \subset \mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist.

d.h $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d $\forall n, m \ge n_0$

$\| a_n - a_m \| < \varepsilon$

② (Bolzano_Weierstrass) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bmk ① Der Konvergenz Begriff verträgt sich sehr gut mit Vektorraum Struktur:

Seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^d$ konverge Folgen, und $\alpha \in \mathbb{R}$,

Seien $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^d$

$\lim b_n = b \in \mathbb{R}^d$

Dann $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$

$\lim(\alpha a_n) = \alpha \lim a_n$.

② Der Konvergenz Begriff verträgt sich ~~sehr~~ gut auch mit Körper Struktur in $\mathbb{C}$.

Sei $(z_n) \to z$, $(w_n) \to w$

① $\overline{z_n} \to \overline{z}$

② $\|z_n\| \to \|z\|$

③ $z_n w_n \to zw$

④ Falls $w_n \neq 0$, $w \neq 0$ sind,

$$\lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}.$$

Bsp. $a_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)$

$a_{n,1} = \frac{1}{n} \to 0$

$a_{n,2} = (-1)^n$ divergent

$\Big\}$ $(a_n)_{n\geq 1}$ ist divergent.

§2.7 Reihen (Series)

$(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Die Folge der Partialsummen

Defn Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$a_1 + a_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$

Defn Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent falls die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$, die Folge der Partialsummen, konvergiert.

(Falls $(S_n)_{n\geq 1}$ divergiert, ist die Reihe divergent.)

Falls die Reihe konvergiert

$$\lim S_n = \lim \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Der Grenzwert $\lim S_n$ heisst der Wert oder die Summe der Reihe.

Bsp. ① <u>Geometrische Reihe</u>

Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q|<1$

(wir schreiben $|z|$, statt $\|z\|$).

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1+q+q^2+\cdots$$

$$S_n = 1+\cancel{q}+\cancel{q^2}+\cdots+\cancel{q^n}$$
$$-\quad qS_n = \cancel{q}+\cancel{q^2}+\cancel{q^3}+\cdots+q^{n+1}$$

$$(1-q)S_n = 1-q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad |q|<1$$

$$\Rightarrow S_n \longrightarrow \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

Da $\lim q^n = 0$ für $|q|<1$.

$q=\frac{1}{2}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

<u>**Bmk**</u> Genau wie bei einer Folge, die konvergenz einer Reihe hängt nicht ab von was die Reihe macht am Anfang.

Falls a_n konvergiert gegen a so konvergiert auch $b_n := a_{n+k}$ auch gegen a.

Für beliebigen N_0 gilt das

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k \quad \text{konvergiert}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konvergiert}$$

Im Gegensatz zur Situation bei Folgen

aber der Grenzwert ändert sich!

<u>Bsp.</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{konvergiert}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{2} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

<u>Bsp.</u> $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \to 0$$

$$\frac{1}{n+5} \to \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots\right)$$

$$\to 0.$$

<u>Bsp.</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{2-i}$

Bsp. (Wichtige Bsp für eine divergente Reihe)

Die Harmonische Reihe.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

S_n divergiert, deswegen Die Harmonische Reihe ist divergent.

Bsp. Die "Teleskope Reihe"

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

S_n konvergiert gegen 1

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent mit dem Wert 1.

Bmk Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist keine Summe im Sinne der Algebra sondern im Falle der Divergenz nur ein Symbol for eine nicht konvergente Folge, $(s_n)_{n\geq 1}$)

Im Falle der Konvergenz der Grenzwert der Folge s_n.

Die Gleichung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

ist in dieser einfachen Form FALSCH!

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{"="} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\infty} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}}_{\infty}$$

$$1 = \infty - \infty$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (1-1)$$

$$\text{"="} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 1}_{\infty} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 1}_{\infty}$$

Das einzige, was man sagen kann ist:

Man kann 2 konvergente Folgen addieren und mit ein Skalar multiplizieren

Satz Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $\alpha \in \mathbb{C}$

(1) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ konvergent

und $$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

(2) Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k)$ konvergent

$$\sum^{\infty}(\alpha a_k) = \alpha \sum^{\infty} a_k .$$